数理解析研究所講究録
501巻 1983年 6-20

On 3-manifolds with no periodic maps

阪市大理　河内明夫 (Akio Kawauchi)

1. <u>Introduction と主結果</u>. この報告は小林(阪大), 作間(阪市大)両氏との共同研究の論文[5]の解説であり, 詳細はそれを参照されたい. 断わらない限り, コンパクト連結有向 PL(又は C^∞) 3-多様体を単に3-多様体と呼ぶことにする。また, 周期写像により, 恒等写像以外の PL(又は C^∞) 周期写像をさすことにする。我々の目的は, 与えられた3-多様体の H-cobordism 類の中には, 第2交換子群を法として, もとのものに等しい基本群をもつ, 周期写像をもたない, 3-多様体が無数にあること, 及び 3-球面内の link に対し類似のことが成りたつことを示すことである。 2つの3-多様体 M_0, M_1 に対し, あるコンパクト有向 PL(又は C^∞) 4-多様体 W で次の(1), (2), (3) を満たすものがあるとき, それらは <u>H-cobordant</u> であるという(Fig. 1): (1) $-M_0+M_1 \subset \partial W$, (2) $H_*(W, M_i; Z)=0$, $i=0,1$, (3) $\overline{\partial W-(-M_0+M_1)}$ は ϕ 又は $(\partial M_0)\times[0,1]$ と同相になる。

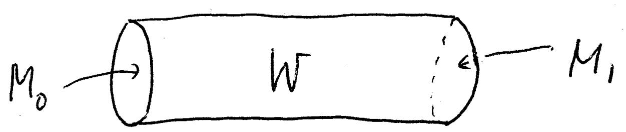


Fig. 1.

群 G に対し，G'' を G の第二交換子群，$G=G_1\supset G_2\supset G_3\supset\cdots$ を G の lower central series とする。

定理1. M を3-多様体とし，∂M は2-球面を含んでいないとする（$\partial M=\phi$ でもよい）。そのとき，Haken 3-多様体 M^* で，次の(1),(2),(3)を満たすものが無数に（同相を無視して）存在する：

(1) M^* は M に H-cobordant，

(2) epimorphism $\theta:\pi_1(M^*)\to\pi_1(M)$ で，$\operatorname{Ker}\theta\subset\pi_1(M^*)''$ となるものがある，

(3) M^* は周期写像をもたない。

(1)のみを満たす Haken 3-多様体 M^* の存在は，Livingston [16]，Mayers [8] により得られていた。また，周期写像を持たない3-多様体の例は，Raymond/Tollefson [10]，Siebenmann [12]，小林[6]，作間[11]で取り上げられた。Stallings [14] の結果を使うと，(1)から次がわかる：

(1)′ すべての q で，$\pi_1(M^*)/\pi_1(M^*)_q\cong\pi_1(M)/\pi_1(M)_q$.

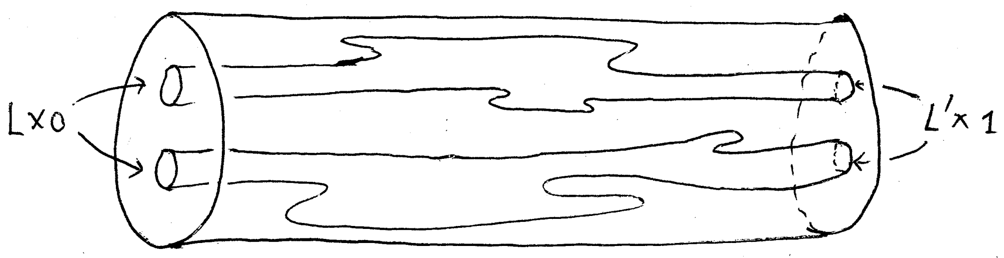
(2)より明らかに次が出る：

(2)′ $\pi_1(M^*)/\pi_1(M^*)'' \cong \pi_1(M)/\pi_1(M)''$。

Haken 3-多様体は aspherical 多様体であり，周期写像を持たない 3-多様体の知られた例はすべて Haken 多様体だったので，次を注意する：

定理2. 任意の3-多様体 M に対し，定理1の(1),(2),(3)を満たす non-aspherical 3-多様体 M^* が無数に存在する。

3-球面 S^3 内の link L に対し，S^3 から L の tube 近傍 $T(L)$ の内部を取り去ったものを L の外部といい，$E(L)$ と書く．$H_1(E(L);Z)$ は自由アーベル群で，その基底として L の各連結成分の meridian よりなるものがとれる．$\tilde{E}(L)$ を $\pi_1(E(L)) \to H_1(E(L);Z)$ の kernel に対応した被覆とする。$H_1(\tilde{E}(L);Z)$ は群環 $Z[H_1(E(L);Z)]$ 上の加群となる。これを L の Alexander 加群という．S^3 内の2つの link L, L' に対し，局所平担埋込み $f: S^1\times[0,1]_1 + S^1\times[0,1]_2 + \cdots + S^1\times[0,1]_r \to S^3\times[0,1]$ で，$L\times 0 = f(S^1\times 0_1 + \cdots + S^1\times 0_r)$, $L'\times 1 = f(S^1\times 1_1 + \cdots + S^1\times 1_r)$ となるものがあるとき，L と L' は cobordant という(Fig.2)。



$S^3 \times [0,1]$

Fig.2.

定理3. S^3内の任意のlink L(knotの場合も含む)に対し,次の(1),(2),(3)を満たすprime link $L^* \subset S^3$が,外部$E(L^*)$の位相型を無視して,無数に存在する:

(1) L^*はLにcobordant,

(2) L^*とLのAlexander加群は,$H_1(E(L^*);Z)$と$H_1(E(L);Z)$のmeridian基底の適当な同一視のもとに,同型となる,

(3) $E(L^*)$は周期写像をもたない。

(1)のみを満たすprime link L^*の存在はKirby/Lickorish [15],[16],[8](ただし,[15],[16]はknotのみ)で得られ,(1),(2)を満たすprime link L^*の存在は中西[20]で得られた。

次の問題は未解決である:各$n \geq 2$に対し,どの3-多様体も必ず周期nの写像をもつ3-多様体にH-cobordantだろうか?どのlinkも必ず外部が周期nの写像をもつようなlinkにcobordantだ

ろうか？　向き逆転周期写像をもつようなものにH-cobordantになれない3-多様体は存在する(例：Poincaréホモロジー球面)。外部が向き逆転同相写像をもつようなknotにcobordantになれないknotは存在する(例，trefoil knot)。

2. 証明に必要なLemmas. 3-多様体の一般用語はJaco[3]による。

Lemma 1. $k\subset S^3$をknotとし，$A\subset\partial E(k)$をkのmeridian annulusとする。もし$E(k)$が$h(A)=A$となる周期写像hをもてば，kはstrongly invertible knotかまたはstrongly negative-amphicheiral knotである。

証明は小林[6, Theorem 2]の証明の議論に含まれる。

Lemma 2. $k(p,q,r)$を交叉数p,q,rのpretzel knot (Fig.3)で，$|p|,|q|,|r|$を奇数>1かつ$pq+qr+rp=-1$なるものとする。(例えば，$p=-2r+1$，$q=-2r+1$，r，奇数$\neq\pm1$) このとき，$k(p,q,r)$は次を満たす：(1) Alexander多項式1をもつ，(2) non-invertibleである，(3) non-amphicheiralである，

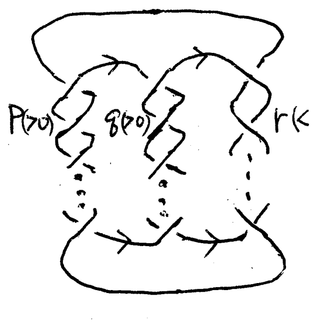


Fig. 3

(4) $E(k(p,q,r))$はnon-Seifert, simple 3-多様体，(5) $\{|p|,|q|,|r|\}\neq$

$\{|p'|,|q'|,|r'|\}$ のとき，$k(p,q,r)$ と $k(p',q',r')$ の knot 型は異なる(即ち，$h(k(p,q,r))=k(p',q',r')$ となる同相写像 $h:S^3 \circlearrowleft$ は存在しない)。

証明は行わない。[(1)は直接，(2)は Trotter [18]，(3)は [4]より，(4)は bridge 指数が3なので，(1) 及び Schubert [21]の議論から出る。(5) は Reidemeister による古典的事実 [17]。]

次の Lemma は中西氏の協力のもとで得られた。感謝する。

<u>Lemma 3</u>. Fig.4 に描かれた link $L_0 = O \cup k_0$ の外部 $E(L_0)$ は non-Seifert, simple である。

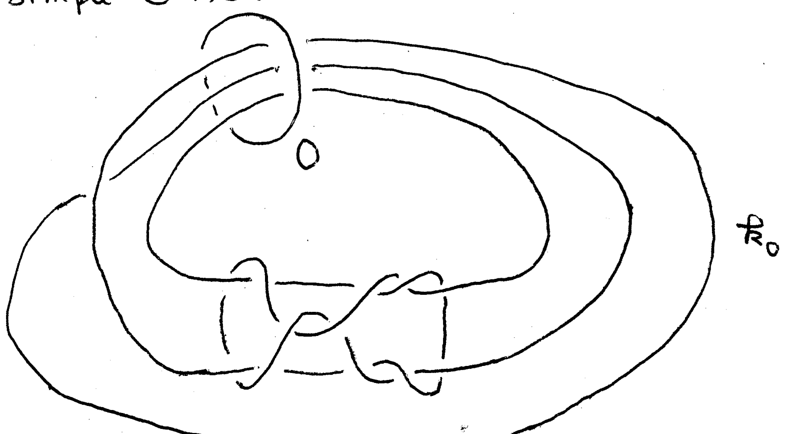
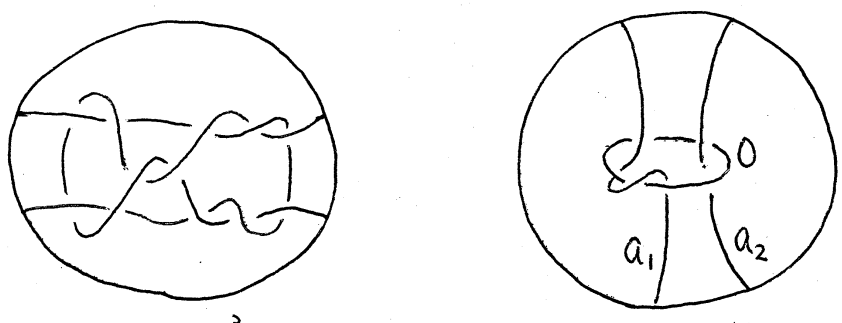


Fig.4

(証明) L_0 を中西 [9] の意味の2つの tangles $t_1 \subset B^3$, $t_2 \subset B^3$ に分ける(Fig.5)。t_1 は相馬 [13]により simple tangle，t_2 は [9]の意味の prime tangle. [Local triviality, Inseparability, Indivisibility は容

易に check できる.] 特に, [9, Theorem 1.10] より L_0 は prime link である.



$t_1 \subset B^3$ $t_2 = O \cup a_1 \cup a_2 \subset B^3$

Fig. 5.

$B^3 - t_2$ に埋め込まれた incompressible torus F は $\partial T(O)$ に isotopic になることを示す。Fig. 6 の斜線部分の disk P をとり, $P_0 = P - P \cap O$

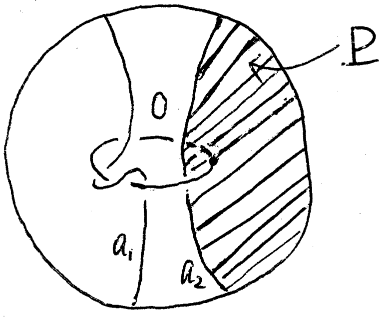


Fig. 6.

とおく。F と P_0 は垂直に交わるとしてよい. F と P_0 は ϕ 又はいくつかの loops よりなるが, isotopy 変形のもとにその個数が最小になるような F と P_0 を考える。$F \cap P_0 \neq \phi$. [もし $F \cap P_0 = \phi$ なら $\pi_1(F) \cong Z + Z$ から $\pi_1(B^3 - a_1 \cup O \cup P \cup \partial B^3) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) = Z * Z$ への monomorphism が存在するはずだが, これは起り得ない.] $F \cap P_0$ の P での innermost loop ℓ を取る. ℓ は P で円板 D を囲む. t_2 の prime 性より, D は

点 $\ell\cap D$ を含み，また ℓ は F で essential。F により B^3 は２つの部分に分けられる．それを N_1, N_2 とする．ただし $\partial N_1=F$, $\partial N_2=F\cup\partial B^3$ とする．もし $D\subset N_1$ ならば，$O\subset B^3$ が trivial knot だから，$(O\subset N_1)\cong(S^1\times 0\subset S^1\times B^2)$ が出て，$F=\partial N_1=\partial T(O)$ がわかる。従って $D\subset N_2$ となれないことを示せば主張が得られる。もし $D\subset N_2$ ならば，$t_2\subset N_2$ となることにより，N_1 はある non-trivial knot k_1 の外部でなければならない．従って，O は k_1 を因子として含むことになり，$O\subset B^3$ の triviality に反する。よって $D\not\subset N_2$．$E(L_0)$ が simple であることを言うために，$E(L_0)$ が ∂-parallel でない incompressible torus F を含んでいたと仮定する。[13, Lemma 2] により F は B^3-t_2 に含まれた torus F' に S^3-L で isotopic．従って上に示したことから，$\partial T(O)$ に isotopic で，結局 ∂-parallel（矛盾）．故に $E(L_0)$ は simple である。$E(L_0)$ は Seifert 多様体でないことを示す．もし $E(L_0)$ が Seifert 多様体ならば，simple であることから，高々 1つの例外ファイバーをもつ annulus 上の Seifert 多様体（Jaco, [3, p155] 参照）．そのとき，$E(k_0)=E(L_0)\cup S^1\times B^2$ は高々２つの例外ファイバーをもつ Seifert 多様体であることが示せ，k_0 は torus knot でなければならない。k_0 は樹下-寺阪 knot と呼ばれる Alexander 多項式 $=1$ をもつ non-trivial knot ([19]) で torus knot ではない．(Fig. 7.)

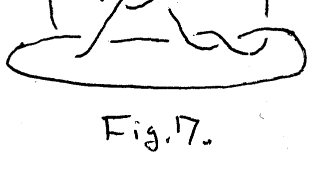


Fig. 7.

こうして $E(L_0)$ はSeifert多様体ではない.(証明終)

<u>Lemma 4.</u> T を3-多様体 M の中のsolid torusとする. $k\subset S^3$ をknotとし, $T(k)$ 上のlongitudeを T のmeridianに移す任意の同相写像 $\partial E(k)\cong\partial T$ により作られた3-多様体 $M^*=\overline{M-T}\cup E(k)/\partial T\equiv\partial E(k)$ を考える. (1) もし k がtrivial knot $O\subset S^3$ にcobordant (即ち, slice knot) ならば M^* と M はH-cobordantである。(2) もし k のAlexander多項式が1ならば, $\mathrm{Ker}\,\theta\subset\pi_1(M^*)''$ となるepimorphism $\theta:\pi_1(M^*)\to\pi_1(M)$ が存在する.

(略証) (1) を示すために, A を k と O をつなぐ $S^3\times[0,1]$ の中のannulusとする. W_0 を $S^3\times[0,1]$ から A のtube近傍の内部を取り除いたものとする。W_0 は $E(k)$ と $S^1\times B^2$ のH-cobordismになり, $T\times1$ と $S^1\times B^2$ を適当に同一視して作った4-多様体 $W=M\times[0,1]\cup W_0$ は M と M^* のH-cobordismを与える. k がAlexander多項式=1のknotであることと, $\pi_1(E(k))/\pi_1(E(k))''\cong Z$ とは同値である. このとき, van Kampenの定理から (2) は得られる。

3. <u>定理1, 2, 3の略証</u>.

<u>定理1の略証</u>. $k=k(p,q,r)$ を向きづけられたLemma 2のpretzel knotとし, $\bar{k}=k(-r,-q,-p)$ (k の"reflected inverse") とおく。$k\#\bar{k}$ はslice knotでAlexander多項式は1.

Lemma 3で考えた link $L_0 = O \cup k_0$ に対し，$k_0 \subset \overline{S^3 - T(O)}$ ($\cong S^1 \times B^2$) を考える．$T(O)$ の meridian, longitude を $T(k)$ の longitude, meridian に移す同相 $\overline{S^3 - T(O)} \cong T(k) \subset S^3$ により k_0 を S^3 の中に入れる。出来た knot を $k(k_0)$ とかく．Lemma 3 より $E(k(k_0))$ は essential annulus を含まず，従って $k(k_0)$ は prime。$k \# k(k_0)$ は slice knot で，Alexander 多項式は 1 であることが示せる。定理を得るためには，まず Mayers [8] の結果から，$E = \overline{M - T(k_s)}$ が non-Seifert, simple で，$[k_s] = 0$ ($\in H_1(M;Z)$) となるような knot $k_s \subset \mathrm{Int}\, M$ がとれることに注意する．そのとき，$T(k_s)$ の meridian, longitude を一意に指定できる．$T(k \# k(k_0))$ の meridian, longitude を $T(k_s)$ の longitude, meridian に移す同相 $\partial E(k \# k(k_0)) \cong \partial T(k_s)$ により作る 3-多様体 $M^* = E \cup E(k \# k(k_0)) / \partial E \equiv \partial E(k \# k(k_0))$ は定理 1 の (1), (2) を満たす Haken 3-多様体である．M^* が周期写像をもたないことをいうのに，simple部分が E, $E(k)$, $E(L_0)$, $E(k)$ からなるような M^* の Jaco/Shalen-Johannson 分割 ([3]) を考える．M^* の任意の自己同相 h は，$h' E(k \# k(k_0)) = E(k \# k(k_0))$ となる h' に ambient isotopic となることがわかる．[ここで使う事実: $D(2)$ を穴2つをもつ円板とし，P_1, P_2, P_3 を $\partial D(2)$ の各成分上の点とする．$D(2) \times S^1$ の任意の自己同相写像は $p_1 \times S^1 \cup p_2 \times S^1 \cup p_3 \times S^1$ を isotopy を無視して考えると，保存する．] それ故，もし h が周期写像ならば，同変 torus 定理 (Freedman/Hass/Scott [1]) により，

$\bar{h}E(\mathfrak{k}\#\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_0))=E(\mathfrak{k}\#\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_0))$ とできる。そのとき、同変 annulus 定理[6]から $\bar{h}E(\mathfrak{k})=E(\mathfrak{k})$, かつ $\mathfrak{k}$ のある meridian annulus $A\subset\partial E(\mathfrak{k})$ に対し、$\bar{h}A=A$ とできる([6, Theorem 2]の証明参照)。[$\mathfrak{k}$, $\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_0)$ knot 型の異なる prime knots に注意する。] Lemma 1 により、$\mathfrak{k}$ は strongly invertible か又は strongly negative-amphicheiral でなければならない。Lemma 2 より $\mathfrak{k}$ はそうではない。このような M^* は同相を除いて無数にあることは、Lemma 2(5)より出る。実際、pretzel knots $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ から構成したものを M_1^*, M_2^* と書くとき、Jaco/Shalen-Johannson 分割を考えることにより、「$M_1^*\cong M_2^* \Rightarrow$ meridian を保存する同相 $E(\mathfrak{k}_1)\cong E(\mathfrak{k}_2)$ がある $\Rightarrow$ $\mathfrak{k}_1$ と $\mathfrak{k}_2$ は同じ knot 型をもつ」がわかる。(略証終)

(注意) Johannson の定理[3, Chap. X]より、「$\pi_1(M_1^*)\cong\pi_1(M_2^*) \Leftrightarrow M_1^*\cong M_2^*$」もわかるので、定理1は基本群の同型を除いて、$M^*$ は無数にあると述べてもよい。

定理2の略証. まず ∂M が 2-球面を含まない場合を考える。定理1の(1),(2)を満たす Haken 3-多様体 M_1 をとる。3-球面と定理1を使って、(1),(2),(3)を満たし、M_1 に同相でないような Haken ホモロジー球面 S^* が無数にある。そのとき $M_1\#S^*$ は non-aspherical で(1),(2)を満たす。同変球面定理(Meeks/Yau [7])

により(3)も満たす. ∂Mが2-球面を含む場合は，すべての2-球面にそって3-cellをはる(今の場合r個)：$M^+ = M \cup B_1^3 \cup \cdots \cup B_{r_0}^3$.
定理1よりM^+から(1),(2),(3)を満たすHaken 3-多様体M^{+*}が無数に作れる。このとき，M^*として，M^{+*}からr個の3-cells(の内部)を除いたものをとる. M^*はnon-asphericalで，Mに対し(1),(2),(3)を満たす。

定理3の略証. 中西[20]により，(1),(2)を満たすprime link L^*が存在する. それ故，Lをprime linkと仮定してよい. Lの成分をL_i, $i=1,2,\cdots,r$, とかく。相異なるknot型をもつr個のLemma 2のpretzel knots k_i, $i=1,2,\cdots,r$, を用意する，ただし，$r=1$のときはk_1は$L=L_1$と異なるknot型をもつものとする。定理1の証明で使ったknot sum $k_i \# \bar{k}_i(k_0)$を考える. $L_i' = L_i \# k_i \# \bar{k}_i(k_0)$, $L' = \bigcup_{i=1}^{r} L_i'$とおく(Fig. 8)。 L'はLに対し(1),(2)を満たす. さらに，$L^* = \bigcup_{i=1}^{r} L_i'(k_0)$とおくと，Lemma 3よりこれはprime linkで，[9, Lemma 3.3]よりL'に対し，(1),(2)を満たすことがわかる.

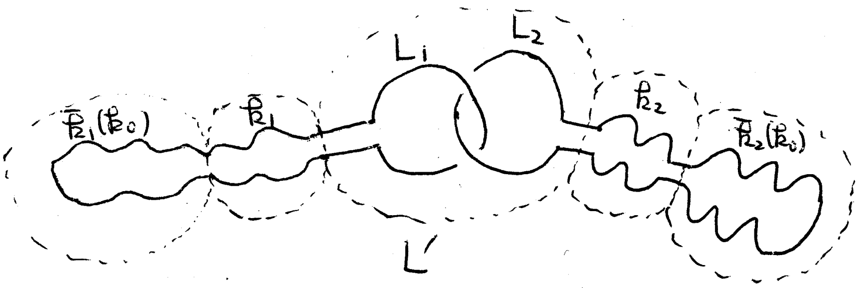


Fig. 8.

L^*が(3)を満たしていることを示すのに，$\partial E(L^*)$と交わるr個の$E(L_0)$を simple 部分としてもつ$E(L^*)$の Jaco/Shalen–Johannson 分解を考える。任意の同相写像$h : E(L^*) \circlearrowleft$は，$h'(E(L^*)) = E(L^*)$となる$h'$に ambient isotopic なことがわかる．もしhが周期写像ならば，同変 torus 定理から$h(E(L')) = E(L')$とできる．L'の各成分は non-prime だから，任意の同相$h_1 : E(L') \circlearrowleft$は同相$\bar{h}_1 : S^3 \circlearrowleft$で$\bar{h}_1(L') = L'$となるものに拡張する([6, Lemma 2.1]参照)．橋本[2]による link の素分解の一意性により，$\bar{h}_1$はL'の各素因子を保存する．というのは，L'の各素因子は相異なるようにしたのだから．それ故，特に，$h(E(k_1 \# \bar{k}_1(k_0)))$と$E(k_1 \# \bar{k}_1(k_0))$は$E(L')$においてisotopic。同変 torus 定理から$h(E(k_1 \# \bar{k}_1(k_0))) = E(k_1 \# \bar{k}_1(k_0))$と仮定できる．定理1の証明において，これは起らないことを見た。故に，$E(L^*)$は周期写像hを持つことができない．無限にあることは，定理1と同じ理由による．(略証終)

参考文献

[1] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, Invent. Math. 71 (1983), 602-642.

[2] Y. Hashizume, On the uniqueness of the decomposition of a link, Osaka Math. J. 10 (1958), 283-300.

[3] W. Jaco, Lectures on three manifold topology, Conference Board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. 43, 1980.

[4] A. Kawauchi, A survey on pretzel knots, preprint.

[5] A. Kawauchi, T. Kobayashi and M. Sakuma, On 3-manifolds with no periodic maps, preprint.

[6] T. Kobayashi, Equivariant annulus theorem for 3-manifolds, preprint.

[7] W. H. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, Ann. of Math. 12 (1980), 441-484.

[8] R. Mayers, Homology cobordisms, link concordance and hyperbolic 3-manifolds, preprint.

[9] Y. Nakanishi, Primeness of links, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9 (1981), 415-440.

[10] F. Raymond and J. L. Tollefson, Closed 3-manifolds with no periodic maps, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), 403-418; Corrections, ibid.

272 (1982), 803 - 807.

[11] M. Sakuma, Homology cobordisms and 3-manifolds with no periodic maps (unpublished version), Osaka City Univ. (1983).

[12] L.C. Siebenmann, On vanishing of the Rochlin invariant and non-finitely amphicheiral homology 3-spheres, Lect. Notes in Math. 788, Springer-Verlag, 172-222, 1980.

[13] T. Soma, Simple links and tangles, Tokyo J. Math. (to appear).

[14] J. Stallings, Homology and central series of groups, J. Algebra 2 (1965), 170-181.

[追加]

[15] R.C. Kirby and W.B.R. Lickorish, Prime knots and concordances, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 86 (1979), 437-441.

[16] C. Livingston, Homology cobordisms of 3-manifolds, knot concordances, and prime knots, Pacific J. Math. 94 (1981), 193-206.

[17] K. Reidemeister, Knotentheorie, Ergebn. Math. 1 (1932).

[18] H.F. Trotter, Non-invertible knots exist, Topology 2 (1964), 275-284.

[19] S. Kinoshita and H. Terasaka, On unions of knots, Osaka Math. J. 9 (1957), 131-153.

[20] Y. Nakanishi, Prime links, concordance and Alexander invariants, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8 (1980) 561-568.

[21] H. Schubert, Über eine Numerische Knoteninvariante, Math. Z. 61 (1954) 245-288.